

# 15 合同と証明

## ■命題の仮定と結論

客観的に正しいか、正しくないかを判断できる文章を**命題**という。

「○○○ならば□□□」の○○○の部分**仮定**、□□□の部分**結論**という。

【例題】 次の命題の、仮定と結論を答えなさい。

(1)  $x > 0, y < 0$  ならば,  $xy < 0$  である。 → 仮定:  $x > 0, y < 0$  結論:  $xy < 0$  …(答)

(2)  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  ならば,  $\angle ABC = \angle DEF$  である。

→ 仮定:  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  結論:  $\angle ABC = \angle DEF$  …(答)

## ■証明

あることがらが成り立つことを、筋道を立てて明らかにすることを証明という。

【例題】 下の図で、 $AB=AD, CB=CD$  ならば、 $\triangle ABC$  と  $\triangle ADC$  は合同であることを証明しなさい。

【仮定】  $AB=AD, CB=CD$

【結論】  $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$

【証明】  $\triangle ABC$  と  $\triangle ADC$  において、

△ABCの 辺や角を 左に	$AC = AC$ (共通) …①	}	注目する三角形を宣言
	$AB = AD$ (仮定) …②		△ADCの辺や角を右に
	$CB = CD$ (仮定) …③		( ) 内にイコール になる理由を書く

①, ②, ③より 3辺がそれぞれ等しい ので

$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$

①~③から言える  
合同条件を書く

最後に結論を書く

【例題】 下の図で、 $AB=AC, AD=AE$  ならば、 $\triangle ABE$  と  $\triangle ACD$  は合同であることを証明しなさい。

【仮定】  $AB=AC, AD=AE$

【結論】  $\triangle ABE \equiv \triangle ACD$

【証明】  $\triangle ABE$  と  $\triangle ACD$  において、

$AB = AC$ (仮定) …①	}	2つの三角形の 2辺がそれぞれ 等しい
$AE = AD$ (仮定) …②		
$\angle BAE = \angle CAD$ (共通) …③		2辺の間の 角が等しい

①, ②, ③より 2辺とその間の角がそれぞれ  
等しいので  $\triangle ABE \equiv \triangle ACD$

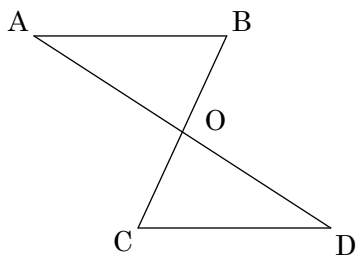


【例題】下の図で、 $AB \parallel CD$ ,  $OB=OC$  ならば、 $\triangle OAB \equiv \triangle ODC$  であることを証明しなさい。

【仮定】  $AB \parallel CD, OB=OC$

【結論】  $\triangle OAB \equiv \triangle ODC$

【証明】



$\triangle OAB$  と  $\triangle ODC$  において、

$OB=OC$  (仮定) …①

$\angle OBA = \angle OCD$  (平行線の錯角) …②

$\angle AOB = \angle DOC$  (対頂角) …③

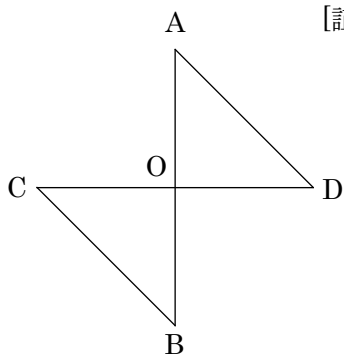
①, ②, ③より、1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle OAB \equiv \triangle ODC$

【例題】下の図で、 $AB \perp CD$  で点  $O$  は  $AB, CD$  の中点ならば、 $\triangle OAD \equiv \triangle OBC$  であることを証明しなさい。

【仮定】  $AB \perp CD, AO=BO, CO=DO$

【結論】  $\triangle OAD \equiv \triangle OBC$

【証明】



$\triangle OAD$  と  $\triangle OBC$  において、

$AO=BO$  (仮定) …①

$CO=DO$  (仮定) …②

$\angle AOD = \angle BOC = 90^\circ$  (仮定) …③

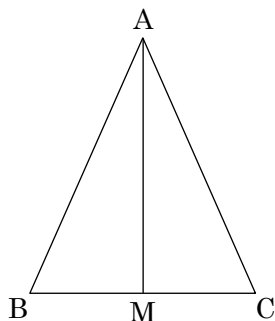
①, ②, ③より、2辺とその間の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle OAD \equiv \triangle OBC$

【例題】下の図で、 $AB=AC$  で点  $M$  は  $BC$  の中点ならば、 $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$  であることを証明しなさい。

【仮定】  $AB=AC, BM=CM$

【結論】  $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$

【証明】



$\triangle ABM$  と  $\triangle ACM$  において、

$AB=AC$  (仮定) …①

$BM=CM$  (仮定) …②

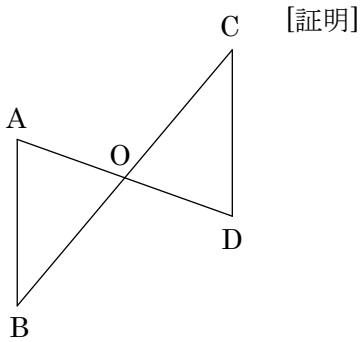
$AM=AM$  (共通) …③

①, ②, ③より、3辺がそれぞれ等しいので、 $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$

【4】下の図で、 $AB \parallel CD$ ,  $OA = OD$  ならば、 $\triangle OAB \equiv \triangle ODC$  であることを証明しなさい。

[仮定]

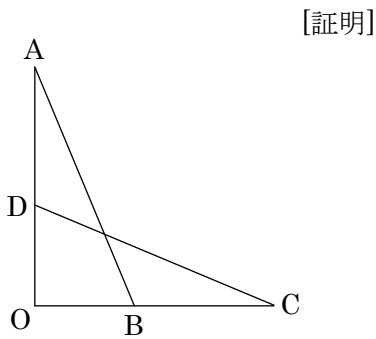
[結論]



【5】下の図で、 $AO \perp CO$ ,  $AO = CO$ ,  $DO = BO$  ならば、 $\triangle OAB \equiv \triangle OCD$  であることを証明しなさい。

[仮定]

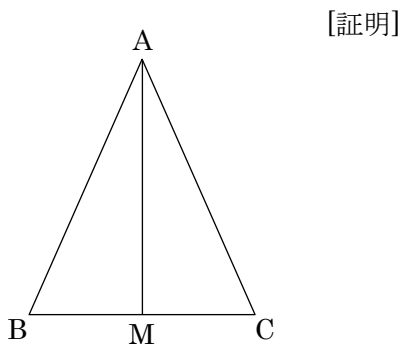
[結論]



【6】下の図で、 $AM \perp BC$  で点 M は BC の中点ならば、 $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$  であることを証明しなさい。

[仮定]

[結論]



■命題の逆

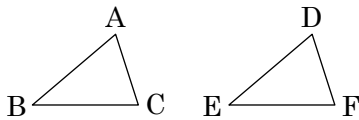
ある命題の仮定と結論を入れかえた命題を、命題の**逆**という。

【例題】 次の命題が正しいか、正しくないかを判定しなさい。またその命題の逆を答え、それが正しいか、正しくないかも判定しなさい。

(1)  $x = 5$  ならば  $x^2 = 25$  である。→正しい

逆:  $x^2 = 25$  ならば  $x = 5$  である。→正しくない ※  $x^2 = 25$  ならば  $x = 5, -5$

(2)  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  ならば  $AB = DE$  である。→正しい

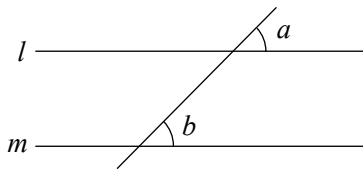


※合同な図形の対応する角や辺は等しい

逆:  $AB = DE$  ならば  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  である。

→正しくない ※仮定が合同条件ではない

(3) 下図に関して、 $l \parallel m$  ならば  $\angle a = \angle b$  である。→正しい



逆:  $\angle a = \angle b$  ならば  $l \parallel m$  である。→正しい

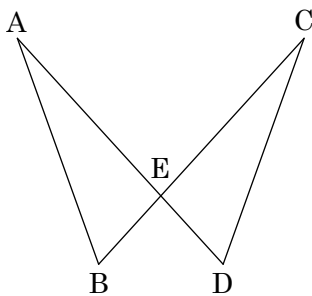
※  $l$  と  $m$  が平行ならば、同位角は等しい。

逆に同位角が等しければ、 $l$  と  $m$  は平行。

【例題】 下の図で、 $AE = CE$ ,  $\angle BAE = \angle DCE$  ならば、 $AB = CD$  であることを証明しなさい。

[仮定]  $AE = CE$ ,  $\angle BAE = \angle DCE$

[結論]  $AB = CD$



[証明]

$\triangle ABE$  と  $\triangle CDE$  において、

$AE = CE$  (仮定) …①

$\angle BAE = \angle DCE$  (仮定) …②

$\angle AEB = \angle CED$  (対頂角) …③

①, ②, ③より、1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle ABE \equiv \triangle CDE$

合同な図形の対応する**辺の長さ**は等しいので  
 $AB = CD$

角が等しいことを証明する場合は  
「合同な図形の対応する**角の大きさ**は等しいので」に書きかえる。

【7】 次の命題が正しいか、正しくないかを判定しなさい。またその命題の逆を答え、それが正しいか、正しくないかも判定しなさい。

(1)  $n$  は 4 の倍数ならば  $n$  は偶数である。→( 正しい ・ 正しくない )

逆 : ( ) →( 正しい ・ 正しくない )

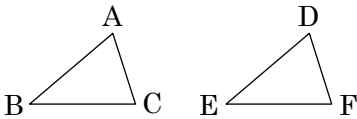
(2)  $a+b=1$  ならば  $a=1-b$  である。→( 正しい ・ 正しくない )

逆 : ( ) →( 正しい ・ 正しくない )

(3)  $x+y=4$  ならば  $x=3, y=1$  である。→( 正しい ・ 正しくない )

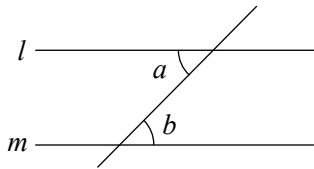
逆 : ( ) →( 正しい ・ 正しくない )

(4)  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  ならば  $\angle C = \angle F$  である。→( 正しい ・ 正しくない )



逆 : ( )  
→( 正しい ・ 正しくない )

(5) 図において、 $l \parallel m$  ならば  $\angle a = \angle b$  である。→( 正しい ・ 正しくない )



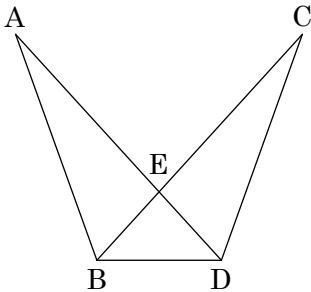
逆 : 図において ( )  
→( 正しい ・ 正しくない )

【8】 下の図で、 $AB=CD, AD=CB$  ならば、 $\angle ADB = \angle CBD$  であることを証明しなさい。

[仮定]

[結論]

[証明]

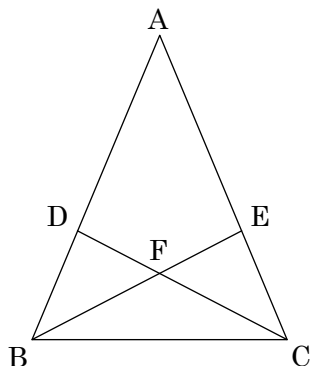


【例題】下の図で、 $BD=CE$ ,  $BE=CD$  ならば、 $\angle DBC=\angle ECB$ であることを証明しなさい。

【仮定】  $BD=CE$ ,  $BE=CD$

【結論】  $\angle DBC=\angle ECB$

【証明】



$\triangle DBC$  と  $\triangle ECB$  において、

$BC=CB$  (共通) …①

$BD=CE$  (仮定) …②

$CD=BE$  (仮定) …③

①, ②, ③より、3辺がそれぞれ等しいので、

$\triangle DBC \equiv \triangle ECB$

合同な図形の対応する角の大きさは等しいので

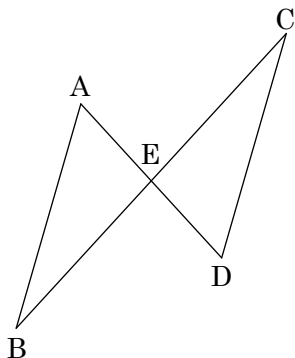
$\angle DBC=\angle ECB$

【例題】下の図で、 $AE=DE$ ,  $BE=CE$  ならば、 $AB \parallel CD$ であることを証明しなさい。

【仮定】  $AE=DE$ ,  $BE=CE$

【結論】  $AB \parallel CD$

【証明】



$\triangle ABE$  と  $\triangle DCE$  において、

$AE=DE$  (仮定) …①

$BE=CE$  (仮定) …②

$\angle AEB=\angle DEC$  (対頂角) …③

①, ②, ③より、2辺とその間の角がそれぞれ

等しいので、 $\triangle ABE \equiv \triangle DCE$

合同な図形の対応する角の大きさは等しいので

$\angle EAB=\angle EDC$

よって錯角が等しいので  $AB \parallel CD$

【例題】下の図は、 $\angle XOY$ の二等分線を作図したものである。この図において  $\angle XOP=\angle YOP$ であることを証明しなさい。

【仮定】  $OA=OB$ ,  $AP=BP$

【結論】  $\angle XOP=\angle YOP$

※コンパスの幅が等しいことに注意する

【証明】

$\triangle AOP$  と  $\triangle BOP$  において、

$OP=OP$  (共通) …①

$OA=OB$  (仮定) …②

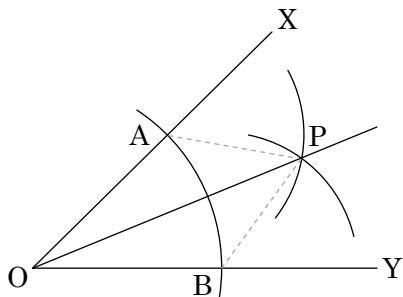
$AP=BP$  (仮定) …③

①, ②, ③より、3辺がそれぞれ

等しいので、 $\triangle AOP \equiv \triangle BOP$

合同な図形の対応する角の大きさは

等しいので  $\angle XOP=\angle YOP$

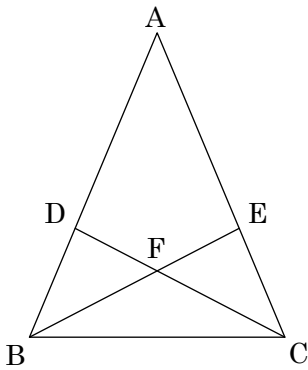


【9】下の図で、 $\angle ABE = \angle ACD$ ,  $AB = AC$  ならば、 $CD = BE$  であることを証明しなさい。

【仮定】

【結論】

【証明】

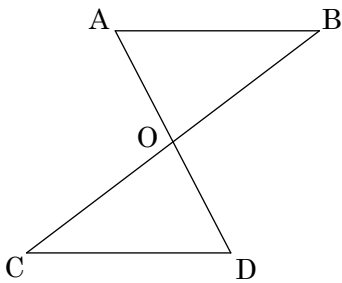


【10】下の図で、 $O$  は  $AD, BC$  の中点ならば、 $AB \parallel CD$  であることを証明しなさい。

【仮定】

【結論】

【証明】

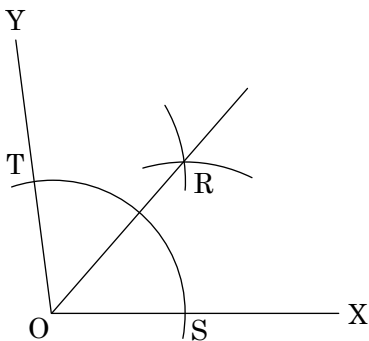


【11】下の図は、 $\angle XOY$  の二等分線を作図したものである。この図において  $\angle XOR = \angle YOR$  であることを証明しなさい。

【仮定】

【結論】

【証明】





【12】下の命題に関して次の問いに答えなさい。

命題： $x > 0, y > 0$ ならば、 $xy > 0$ である。

(1) この命題の仮定と結論を答えなさい。 仮定：[ ] 結論：[ ]

(2) この命題は正しいか、正しくないか。また正しくない場合はその理由も述べなさい。

(3) この命題の逆を答えなさい。 [ ]

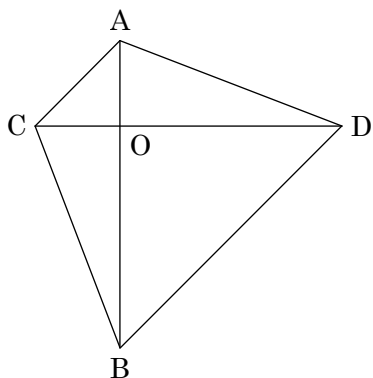
(4) この命題の逆は正しいか、正しくないか。また正しくない場合はその理由も述べなさい。

【13】下の図で、 $AB \perp CD, OA = OC, OB = OD$ ならば $\angle ABC = \angle ADC$ であることを証明しなさい。

[仮定]

[結論]

[証明]

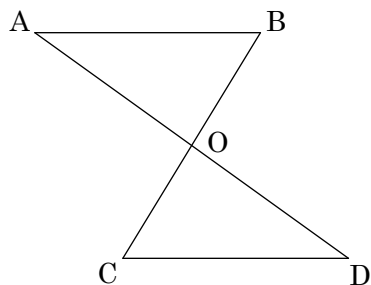


【14】下の図で、 $AB = CD, AB \parallel CD$ ならばOはADの中点であることを証明しなさい。

[仮定]

[結論]

[証明]



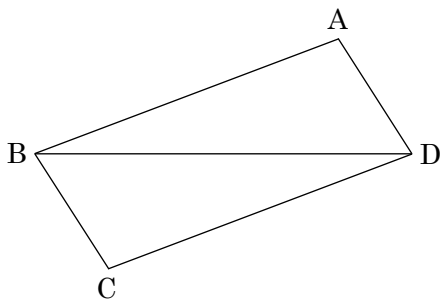
【15】下の図で、 $AB=CD$ ,  $AD=BC$  ならば  $AB\parallel CD$  であることを証明しなさい。

[仮定]

---

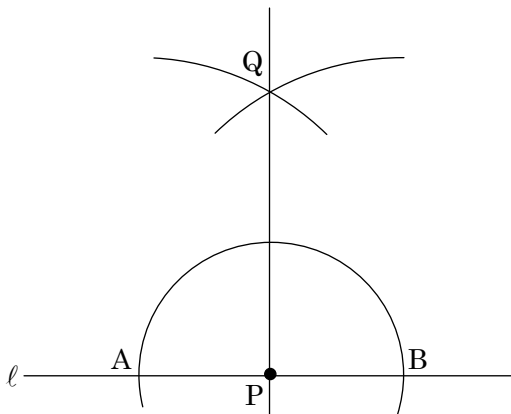
[結論]

---



【16】下図は直線  $l$  上の点  $P$  を通り、 $l$  と垂直な線を作図したものである。この図について次の問いに答えなさい。

(1)  $\angle APQ = \angle BPQ$  となることを証明しなさい。



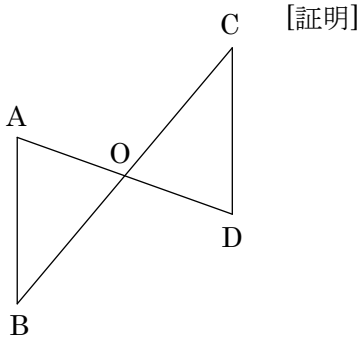
(2) (1)のことを利用して、 $l \perp PQ$  となる理由を述べなさい。



【4】下の図で、 $AB \parallel CD$ ,  $OA=OD$  ならば、 $\triangle OAB \equiv \triangle ODC$  であることを証明しなさい。

[仮定]

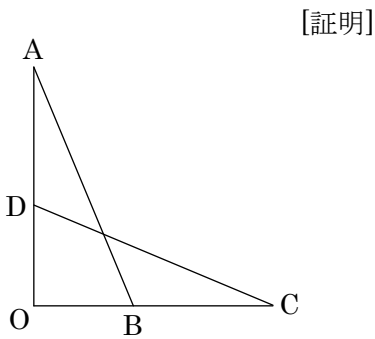
[結論]



【5】下の図で、 $AO \perp CO$ ,  $AO=CO$ ,  $DO=BO$  ならば、 $\triangle OAB \equiv \triangle OCD$  であることを証明しなさい。

[仮定]

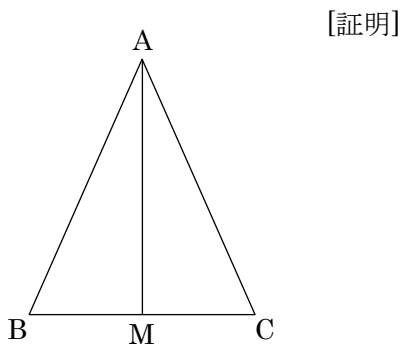
[結論]



【6】下の図で、 $AM \perp BC$  で点 M は BC の中点ならば、 $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$  であることを証明しなさい。

[仮定]

[結論]



【7】 次の命題が正しいか、正しくないかを判定しなさい。またその命題の逆を答え、それが正しいか、正しくないかも判定しなさい。

(1)  $n$  は 4 の倍数ならば  $n$  は偶数である。→( 正しい ・ 正しくない )

逆 : ( ) →( 正しい ・ 正しくない )

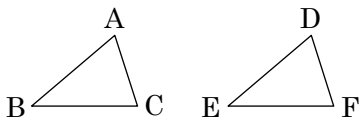
(2)  $a+b=1$  ならば  $a=1-b$  である。→( 正しい ・ 正しくない )

逆 : ( ) →( 正しい ・ 正しくない )

(3)  $x+y=4$  ならば  $x=3, y=1$  である。→( 正しい ・ 正しくない )

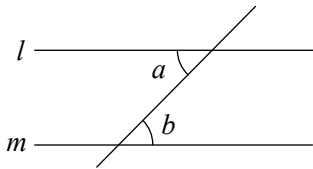
逆 : ( ) →( 正しい ・ 正しくない )

(4)  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  ならば  $\angle C = \angle F$  である。→( 正しい ・ 正しくない )



逆 : ( )  
→( 正しい ・ 正しくない )

(5) 図において、 $l \parallel m$  ならば  $\angle a = \angle b$  である。→( 正しい ・ 正しくない )



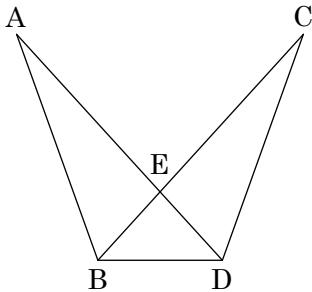
逆 : 図において ( )  
→( 正しい ・ 正しくない )

【8】 下の図で、 $AB=CD, AD=CB$  ならば、 $\angle ADB = \angle CBD$  であることを証明しなさい。

[仮定]

[結論]

[証明]

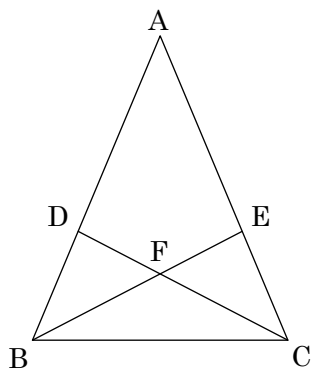


【9】下の図で、 $\angle ABE = \angle ACD$ ,  $AB = AC$  ならば、 $CD = BE$  であることを証明しなさい。

【仮定】

【結論】

【証明】

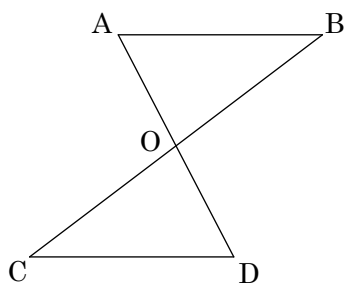


【10】下の図で、 $O$  は  $AD, BC$  の中点ならば、 $AB \parallel CD$  であることを証明しなさい。

【仮定】

【結論】

【証明】

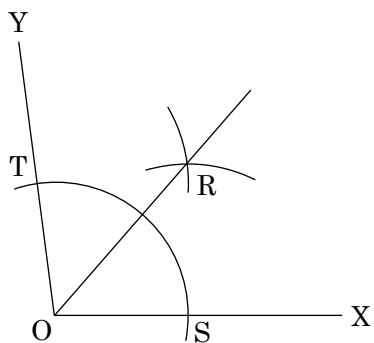


【11】下の図は、 $\angle XOY$  の二等分線を作図したものである。この図において  $\angle XOR = \angle YOR$  であることを証明しなさい。

【仮定】

【結論】

【証明】



【12】下の命題に関して次の問いに答えなさい。

命題： $x > 0, y > 0$ ならば、 $xy > 0$ である。

(1) この命題の仮定と結論を答えなさい。 仮定：[ ] 結論：[ ]

(2) この命題は正しいか、正しくないか。また正しくない場合はその理由も述べなさい。

(3) この命題の逆を答えなさい。 [ ]

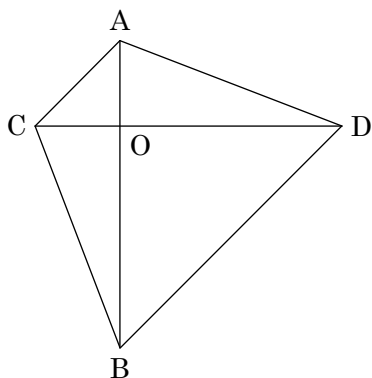
(4) この命題の逆は正しいか、正しくないか。また正しくない場合はその理由も述べなさい。

【13】下の図で、 $AB \perp CD, OA = OC, OB = OD$ ならば $\angle ABC = \angle ADC$ であることを証明しなさい。

[仮定]

[結論]

[証明]

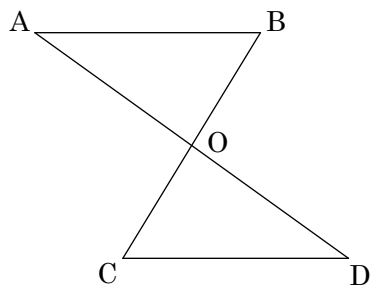


【14】下の図で、 $AB = CD, AB \parallel CD$ ならばOはADの中点であることを証明しなさい。

[仮定]

[結論]

[証明]



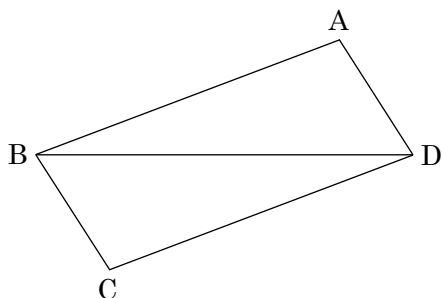
【15】下の図で、 $AB=CD$ ,  $AD=BC$  ならば  $AB\parallel CD$  であることを証明しなさい。

[仮定]

---

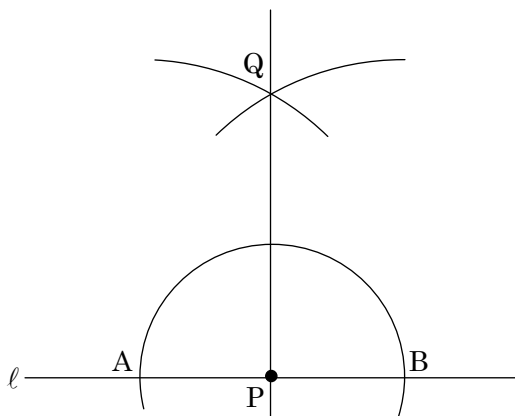
[結論]

---



【16】下図は直線  $l$  上の点  $P$  を通り、 $l$  と垂直な線を作図したものである。この図について次の問いに答えなさい。

(1)  $\angle APQ = \angle BPQ$  となることを証明しなさい。



(2) (1)のことを利用して、 $l \perp PQ$  となる理由を述べなさい。