

11章

因数分解

●因数とは

多項式がいくつかの積で表されるとき、その1つ1つの式をもとの式の因数という。

(例1) $5a(3a-5b) \rightarrow$ 因数: $5a, (3a-5b)$ (例2) $2(x-y)^2 \rightarrow$ 因数: $2, x-y$

●因数分解とは

多項式をいくつかの因数の積の形に表すことを、もとの式を因数分解するという。

(例1) $a^2+ab \xrightleftharpoons[\text{展開}]{\text{因数分解}} a(a+b)$ (例2) $x^2+3x+2 \xrightleftharpoons[\text{展開}]{\text{因数分解}} (x+1)(x+2)$

●因数分解のパターン①

パターン1 $ab+ac = a(b+c)$... 共通因数をくくり出す

パターン2 $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$... $\bigcirc^2 - \Delta^2 = (\bigcirc - \Delta)(\bigcirc + \Delta)$

例題1 次の式を因数分解しなさい。

(1) $a^2+ab+a \rightarrow$ 共通因数: a (2) $4xy^2-8xy \rightarrow$ 共通因数: $4xy$
 $= a(a+b+1)$ $= 4xy(y-2)$

NG: $a^2+ab+a = a(a+b)+a$ NG: $4xy^2-8xy = 4(xy^2-2xy) \rightarrow$ 不十分
 \rightarrow 積の形になっていない NG: $4xy^2-8xy = xy(4y-8) \rightarrow$ 不十分

重要 式を展開して答えが合っているか必ず確かめること

(1) $a(a+b+1) = a^2+ab+a$ (2) $4xy(y-2) = 4xy^2-8xy$

例題2 次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2-1 = x^2-1^2 = (x-1)(x+1)$
 (2) $4a^2-9 = (2a)^2-3^2 = (2a-3)(2a+3)$
 (3) $25x^2-49y^2 = (5x)^2-(7y)^2 = (5x-7y)(5x+7y)$

※答えを展開した式がもとの式に戻るか確認しよう。

【パターンを見分けるコツ】

最初に必ず共通因数を探す。共通因数があればパターン1で解く。

共通因数がなければ $\bigcirc^2-\Delta^2$ の形にならないかを考える。

パターン2でも解けない場合は別のパターン(あとで解説)を考える。

186 次の空欄に当てはまる言葉を答えなさい。

・多項式がいくつかの積で表されるとき、その1つ1つの式をもとの式の(①)という。

・多項式をいくつかの因数の積の形に表すことを、もとの式を(②)するという。

①() ②()

187 次の式を因数分解しなさい。

(1) $ax+ay$ (2) $3x-12y$ (3) x^2-x

(4) $5ab^2+10ab$ (5) $mx-my+mx$ (6) m^2n+mn^2-mn

188 次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2-y^2 (2) x^2-49 (3) a^2-1

(4) $64x^2-y^2$ (5) $9a^2-4b^2$ (6) $81-100d^2$

(7) y^2-36 (8) $36y^2-1$ (9) $16a^2-25b^2$

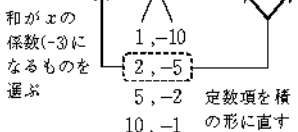
● 因数分解のパターン②

パターン 3 $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

パターン 4 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

例題 3 次の式を因数分解しなさい。

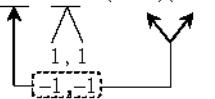
(1) $x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$



パターン 3 $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$
定数項を積の形に直し、その中から和がxの係数と一致するものを見つける！

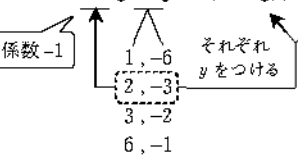
→ $(x-5)(x+2)$ と逆に書いてもよい

(2) $x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1) = (x-1)^2$



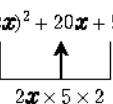
因数が同じ場合は累乗の形にする
※パターン 4 で解いてもよい

(3) $x^2 - xy - 6y^2 = (x+2y)(x-3y) \rightarrow (x-3y)(x+2y)$ と逆に書いてもよい



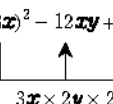
展開してもとに戻るか
検算してみよう！

(4) $4x^2 + 20x + 25 = (2x)^2 + 20x + 5^2 = (2x+5)^2$



パターン 4 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
2乗を省いた(前の項)と(後の項)をかけて2倍すると(中央の項)になるとき、(○±△)の形にすることができる。

(5) $9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x)^2 - 12xy + (2y)^2 = (3x-2y)^2$



-になることに注意

注意 次のような場合は因数分解しやすいように項の順序に変えて行うこと。

$-3 + 2x + x^2 = x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$
 $x^2 + 9y^2 - 6xy = x^2 - 6xy + 9y^2 = (x-3y)^2$

189 次の式を因数分解しなさい。

- (1) $x^2 + 2x - 3$ (2) $x^2 - 2x - 3$ (3) $x^2 + x - 6$

- (4) $a^2 - 4a - 5$ (5) $y^2 + 2y + 1$ (6) $x^2 - 12x + 36$

- (7) $x^2 - 3xy - 18y^2$ (8) $a^2 + 4ab - 12b^2$ (9) $x^2 + 10y^2 + 11xy$

190 次の式を因数分解しなさい。

- (1) $a^2 - 2a + 1$ (2) $9x^2 + 6x + 1$ (3) $9x^2 + 6xy + y^2$

- (4) $4x^2 - 12xy + 9y^2$ (5) $a^2 - 4a + 4$ (6) $4a^2 - 4a + 1$

- (7) $y^2 + 18y + 81$ (8) $9x^2 + 25y^2 - 30xy$ (9) $-20x + 100 + x^2$

191 次の式を因数分解しなさい。

- (1) $y^2 - 1$ (2) $a^2x - aby$ (3) $a^2 - 6a + 9$
- (4) $4x^2 - 20xy + 25y^2$ (5) $x^2 + 3x$ (6) $x^2 - 9x + 18$
- (7) $x^2 - 5x - 14$ (8) $9x^2 - y^2$ (9) $11x - 33y + 22$
- (10) $1 - a^2$ (11) $25x^2 + 10x + 1$ (12) $a^2 - 11ab - 12b^2$
- (13) $3x^2 + 6y^2 - 3$ (14) $x^2 + 6xy + 5y^2$ (15) $x^2 - 6x - 16$
- (16) $x^2 - 8 + 2x$ (17) $100a^2 - 140ab + 49b^2$ (18) $3ab^2 - 27ab$

192 次の式を因数分解しなさい。

- (1) $x^2 + 4x - 45$ (2) $49b^2 - 1$ (3) $12a^2y^2 - 3ay$
- (4) $9x^2 - 12xy + 4y^2$ (5) $9x^2 - 12xy$ (6) $9x^2 - 4y^2$
- (7) $t^2 - t - 56$ (8) $t^2 - t$ (9) $36t^2 - 12t + 1$
- (10) $x^2 - 8xy + 16y^2$ (11) $x^2 + 6xy - 16y^2$ (12) $x^2 - 16y^2$
- (13) $a^2 - 17ab + 16b^2$ (14) $81r^2 - 49s^2$ (15) $16m^2 + 8mn + n^2$
- (16) $k^2 - 5k - 24$ (17) $16x^2 + 49y^2 - 56xy$ (18) $1 - 64m^2$

●複雑な因数分解 複雑な因数分解は以下の4パターンが組み合わされてきている。

パターン 1	$ab+ac=a(b+c)$	パターン 3	$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
パターン 2	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$	パターン 4	$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$

Point 最初にパターン1ができないかを検討。ダメならばパターン2。それでもダメならばパターン3・・・のように考えるようにしよう。

例題 4 次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2-5x+\frac{25}{4} \rightarrow$ **パターン 4** \quad (2) $x^2-\frac{y^2}{16} \rightarrow$ **パターン 2**
 $=x^2-5x+(\frac{5}{2})^2=(x-\frac{5}{2})^2 \dots(\text{答})$ \quad $=x^2-(\frac{y}{4})^2=(x-\frac{y}{4})(x+\frac{y}{4}) \dots(\text{答})$

(3) $x^2+0.2x+0.01 \rightarrow$ **パターン 4** \quad (4) $0.25x^2-0.49y^2 \rightarrow$ **パターン 2**
 $=x^2+0.2x+(0.1)^2$ \quad $= (0.5x)^2-(0.7y)^2$
 $= (x+0.1)^2 \dots(\text{答})$ \quad $= (0.5x-0.7y)(0.5x+0.7y) \dots(\text{答})$

(5) $-3ax^2-6ax+9a \rightarrow$ **パターン 1** \quad (6) $x^3-2x^2y+xy^2 \rightarrow$ **パターン 1**
 $=-3a(x^2+2x-3) \rightarrow$ **パターン 3** \quad $=x(x^2-2xy+y^2) \rightarrow$ **パターン 4**
 $=-3a(x+3)(x-1) \dots(\text{答})$ \quad $=x(x-y)^2 \dots(\text{答})$

(7) $4x^4-x^2y^2 \rightarrow$ **パターン 1** \quad (8) $x^2y^2-1 \rightarrow$ **パターン 2**
 $=x^2(4x^2-y^2) \rightarrow$ **パターン 2** \quad $= (xy)^2-1^2$
 $=x^2\{(2x)^2-y^2\}$ \quad $= (xy-1)(xy+1) \dots(\text{答})$
 $=x^2(2x-y)(2x+y) \dots(\text{答})$

例題 5 次の式を因数分解しなさい。

(1) $a(x+y)-b(x+y)$ \quad (2) $(x-3)^2-2(x-3)-8$
 $A=x+y$ とおくと、 $A=x-3$ とおくと、
 $aA-bA=A(a-b)$ $A^2-2A-8=(A-4)(A+2)$
 $= (x+y)(a-b) \dots(\text{答})$ $= \{(x-3)-4\}\{(x-3)+2\}$
 $= (x-7)(x-1) \dots(\text{答})$

(3) $2a(1-5b)-1+5b$ \quad (4) $x^2-(y-z)^2$
 $=2a(1-5b)-(1-5b)$ $A=y-z$ とおくと、
 $A=1-5b$ とおくと、 $x^2-A^2=(x-A)(x+A)$
 $2aA-A=A(2a-1)$ $= \{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\}$
 $= (1-5b)(2a-1) \dots(\text{答})$ $= (x-y+z)(x+y-z) \dots(\text{答})$

193 次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$ \quad (2) $\frac{a^2}{25}-\frac{b^2}{49}$ \quad (3) $x^2+x+\frac{1}{4}$

(4) $x^2-0.2x+0.01$ \quad (5) $0.16a^2-1$ \quad (6) $0.04-0.25y^2$

(7) $-3x^2+15x-12$ \quad (8) $5x^2+15x-270$ \quad (9) $-2x^2+12xy-18y^2$

(10) $2ax^2-8ay^2$ \quad (11) $1-a^2b^2$ \quad (12) $x^3y-100xy$

194 次の式を因数分解しなさい。

(1) $a(x-y)-6(x-y)$ \quad (2) $(a+2)^2+3(a+2)-28$ \quad (3) $(x-y)^2-x+y$

(4) $a^2-(b+2c)^2$ \quad (5) $4(m+n)^2-4(m+n)+1$

★ 章末問題 ★

195 次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2y + xy - 12y$ (2) $x^2 - \frac{4}{9}$ (3) $0.25x^2 - 0.49y^2$

(4) $3ab^2 - 27ac^2$ (5) $2x^2y + 4xy - 30y$ (6) $\frac{x^2}{4} - y^2$

(7) $2x^2 - 22x + 48$ (8) $-9x + 14 + x^2$ (9) $-x^2 + 2x - 1$

(10) $-3a^2x - 12ax - 12x$ (11) $x^3 - 2x^2y + xy^2$ (12) $ax^2 - 6ax - 27a$

(13) $2c(1 - 3b) - 3b + 1$ (14) $4(y + z)^2 - 16$

196 次の式を因数分解しなさい。

(1) $4x^2 + 8x - 12$ (2) $4x^2 + 12x + 9$ (3) $4x^2 - 16x$

(4) $4x^2 - 16$ (5) $36m^2 - 9n^2$ (6) $2a^2 + 4ab + 2b^2$

(7) $11xy + x^2 + 30y^2$ (8) $64m^2 - 16mn + n^2$ (9) $x^2 - \frac{1}{5}xy + \frac{1}{100}y^2$

(10) $(x - 24)^2 - 2(x - 24) + 1$ (11) $5(x + 41)^2 - 25(x + 41) + 20$

(12) $y(x - 4)(x + 2) + 2xy + 7y$ (13) $(2x + y)(2x - y) - (2x - 3y)^2$